Grandes problemas matemáticos para todos los públicos

Esther Benítez López

Ana Martín Ramos

Cristina Rubio de Nicolás

Diego Sánchez Salazar

María José Torres Martínez

Iván Valero Terrón

Adela María Villegas Escobar y Rafael Ramírez Uclés (Coord.)

<u>El problema de las n reinas</u>:

Contenido matemático: El problema de las n reinas es elaborar un algoritmo de tiempo polinomial que encuentre, en un tablero $n \times n$, una disposición de n reinas de manera que ninguna de ellas se amenace.

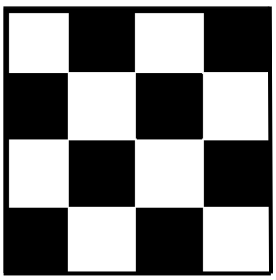
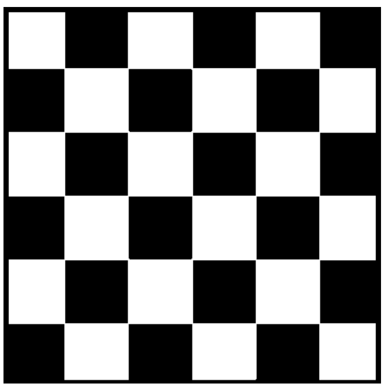
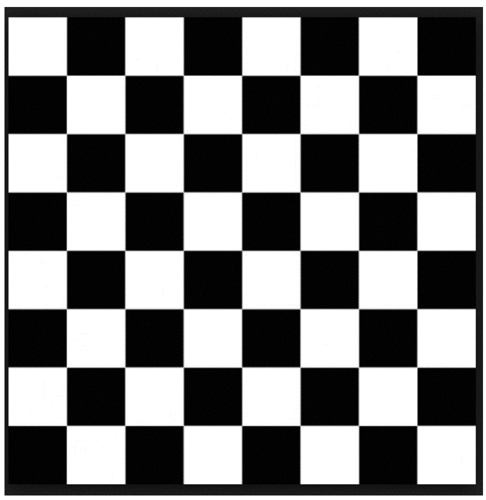
Explicación teórica: El problema fue propuesto por un ajedrecista llamado Max Bezzel en 1848. Como muchos problemas, una situación tangible y definida como es un tablero de ajedrez 8x8 da lugar a un problema matemático generalizado en el que se usan herramientas como vectores o pendientes. Así, matemáticos de la talla de Gauss y Cantor encararon el problema. A pesar de que se han encontrado sin dificultad todas las soluciones de los casos en los que el tamaño del tablero es bajo (n=8, por ejemplo), no se ha descubierto aún un algoritmo que, en un tiempo razonable, encuentre soluciones a este problema.

El enunciado, que parece un mero juego, describe un problema de complejidad NP, puesto que comprobar si un tablero dado cumple el requisito pedido es muy fácil. No obstante, encontrar el algoritmo que calcule soluciones para cualquier tablero se ha convertido en uno de los problemas más difíciles de resolver de la historia de las matemáticas y, en consecuencia, se ofrece un millón de dólares a quien consiga elaborar el algoritmo que demuestre que, además de NP, el problema es de tipo P.

Contexto: El contexto de la formulación de Max Bezzel es poco relevante porque el problema ha evolucionado con el tiempo hasta convertirse en un ejercicio estrictamente matemático que muchos matemáticos han tratado de resolver a lo largo de la historia. Relataremos que, en la actualidad, la resolución del problema abordaría uno de los llamados “problemas del milenio” que plantea la pregunta “¿P=NP?” y que se premia con un millón de dólares.

Material: El material a utilizar serán varios tableros de ajedrez modificados para adaptar la dificultad del problema a distintos niveles. Dispondremos de:

- Un tablero 4x4.
- Un tablero 6x6.
- Un tablero 8x8.

Además de los tableros, utilizaremos figuras para representar las reinas. Como es complicado conseguir 18, nos serviremos de fichas de las damas.

A su vez, contaremos en el stand con una explicación formalizada del problema que apela a vectores para las personas más interesadas en el tema.

Interacción: Plantearemos el problema en orden creciente de dificultad de manera que suponga un reto para todas las personas con interés. A medida que encuentran soluciones, observarán que no son únicas y que sería interesante, por ejemplo, poder construir unas a partir de casos más pequeños (¿un algoritmo recursivo?) o encontrar un patrón de colocación.

<u>Teorema de los cuatro colores</u>

Contenido matemático: El teorema de cuatro colores dice lo siguiente:

> *"Todo mapa plano puede colorearse con, como máximo, cuatro colores con la condición de que regiones con frontera común tengan colores distintos."*

Explicación teórica: A mediados del siglo XIX, Francis Gurthrie se percató mientras que coloreaba un mapa de los condados de Inglaterra que necesitaba al menos cuatro colores para que se cumpliera la condición de que dos regiones con frontera común tuvieran colores distintos. Francis le comentó el tema a su hermano Frederick, que, a su vez, se lo planteó a su profesor de matemáticas Augustus de Morgan, quien, aunque no supo responder el por qué se encargó de difundir el asunto entre otros matemáticos. Así, Arthur Cayley lo presentó formalmente a la London Mathematical Society y así el problema quedó abierto.

En el año 1879, Alfred Kempe publica una demostración del mismo pero un año más tarde Percy Heawood encontró un error insalvable en dicha demostración, por lo que el problema volvía a estar abierto.

Han sido muchos matemáticos los que se han dedicado al estudio de este problema, dejando algunas demostraciones como que para colorear un mapa dibujado en un toro hacen fala como máximo siete colores o que para colorear un mapa en una banda de Möbius hacen falta seis a lo sumo. También se demostró que son suficientes cinco colores para colorear un mapa plano, pero parece que solo son necesario cuatro.

Material: Distintos mapas del mundo dibujados (solamente el contorno de las ciudades, estados) en cartulinas blancas, y con un velcro en el centro de cada ciudad/estado. Estarán recortados las distintas ciudades/estados necesarios para completar los mapas anteriores en cuatro colores distintos, de forma que los niños puedan escoger el color que quieran para cada ciudad/estado. Por detrás de cada recorte de las ciudades/estados habrá también un velcro de forma que puedan pegarse al contorno en la cartulina blanca.

Interacción: Para comenzar plantearemos a los visitantes el reto de colorear un mapa con solamente cuatro colores de forma que dos regiones adyacentes no tengan el mismo color, proporcionándoles los materiales explicados anteriormente.

Una vez que hayan jugado y experimentado le explicaremos que este problema está demostrado, pero utilizando la computación, no es una demostración estrictamente matemática y ha habido sectores de investigación que no terminaban de aceptar la prueba que, hoy en día, se asume como válida por toda la comunidad matemática.

Para terminar, contaremos un poco la historia que hay detrás de este problema y que si se ha llegado a demostrar para cinco colores.

Último Teorema de Fermat

A comienzos del siglo XVII, Pierre de Fermat realizó brillantes descubrimientos en teoría de números. Aunque era un matemático *amateur*, creó desafíos matemáticos como el conocido **Último Teorema de Fermat** (que no fue resuelto hasta 1994 por el matemático estadounidense Andrew Wiles). Wiles dedicó siete años de su vida a tratar de demostrar este famoso teorema que ha engendrado, casi con toda certeza, más intentos de resolución que cualquier otro.

El teorema afirma que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras no nulas para x, y y z cuando $n > 2$. Fermat planteó su teorema en 1637.

Escribió lo siguiente su ejemplar de la *Arithmetica* de Diofanto:

> *"Tengo una demostración verdaderamente maravillosa para esta proposición, pero no cabe en este margen tan estrecho"*

En la actualidad, se cree que Fermat no disponía de tal demostración. Desde su tiempo, el Teorema de Fermat ha dado lugar a numerosas investigaciones matemáticas significativas y procedimientos completamente nuevos. En 1832 Johann Dirichlet publicó una demostración del Último Teorema de Fermat para $n = 14$. Gabriel Lamé lo demostró para $n = 7$ en 1839. Amir Aczel afirma que el teorema "se convirtió en el misterio matemático más desconcertante. Sencillo, elegante, imposible de demostrar (al menos en apariencia), que cautivó la imaginación de matemáticos aficionados y profesionales durante más de tres siglos. Se convirtió, para algunos, en una maravillosa. Para otros, en una obsesión que llevó al engaño, a la intriga o a la locura".

Descripción de la experiencia: Se presenta a los visitantes dos experimentos: el primero, construir un cuadrado $c \times c$ a partir de dos cuadrados, uno $a \times a$ y otro $b \times b$, donde a, b y c son números que forman una terna pitagórica ($a^2 + b^2 = c^2$).

Posteriormente, se les presenta un desafío de dificultad superior: construir un cubo $c \times c \times c$ a partir de dos cubos, uno $a \times a \times a$ y otro $b \times b \times b$. Vista la imposibilidad de la realización, se le explica que no es posible que con los cubitos de un cubo cualquiera, formar dos cubos de forma separada, que es el Último Teorema de Fermat para $n = 3$.

Material:

- Losetas para el caso bidimensional.
- Cubos para el caso tridimensional.

Interacción: Estos experimentos pueden ser concebidos de forma individual, o por parejas.

Conjetura de Goldbach

Contenido matemático: La conjetura de Goldbach que dice lo siguiente:

> *"Todo número par mayor que 2 puede ser escrito como la suma de dos números primos."*

Explicación teórica: Christian Goldbach, matemático prusiano, planteó por primera vez este problema, hace casi 300 años, en una carta a su amigo Euler.

Este problema se trata de una conjetura porque no se ha encontrado hasta el momento ningún contraejemplo que demuestre su falsedad ni una demostración de que es cierto.

En estos años se ha llegado a avanzar en el problema con la demostración de la conjetura débil de Goldbach, que fue demostrada en 2015 por un matemático peruano. La conjetura débil de Goldbach dice que:

> *"Todo número impar mayor que 5 puede ser escrito como la suma de 3 números primos"*

Se llama conjetura débil porque su demostración sería trivial una vez demostrada la conjetura de Goldbach. Bastaría con encontrar dos números primos que sumados dieran el número par tres unidades anterior al número impar que queremos formar, y sumarle 3 (que es otro número primo). Así tendríamos 3 números primos cuya suma da el valor impar deseado.

Lo que sí se ha probado computacionalmente es que la conjetura de Goldbach es cierta para todo número par inferior al trillón.

Material: Emplearemos una tabla con los números primos del 1 al 100 (ilustración 1). También usaremos una plantilla de la forma que se indica en la ilustración 2, donde se plantea la conjetura a los visitantes del stand: cualquier número par (en este caso lo limitaremos hasta el 100) resulta de la suma de dos números primos. Sobre esta plantilla se colocarán tarjetas con los números correspondientes, para lo cual necesitaremos una caja con tarjetas con todos los números pares hasta el 100 y otra caja con todos los números primos también del 1 al 100.

Ilustración 1: Tabla con números primos del 1 al 100

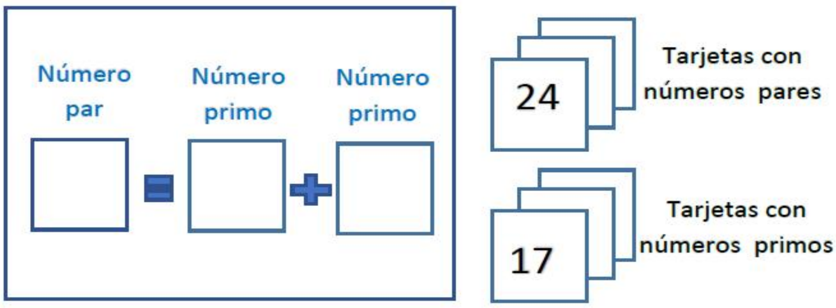


Ilustración 2: Plantilla y tarjetas para aplicar la conjetura

Además, presentaremos un gráfico con la demostración de la conjetura de Goldbach hasta el número 50.

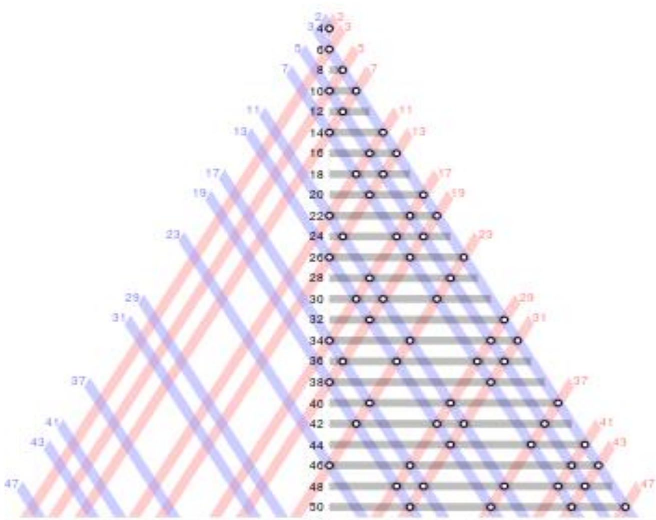


Ilustración 3: Gráfico de la conjetura

Como curiosidad histórica una imagen de la carta original de Goldbach a su amigo Euler planteando el problema.

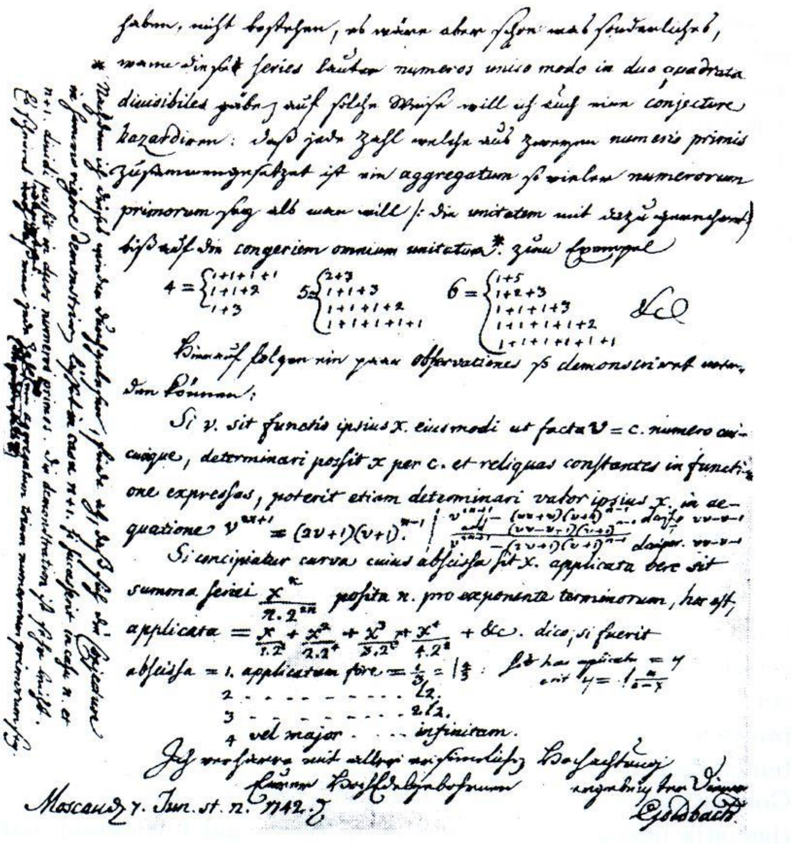


Ilustración 4: Carta

Interacción: Comenzaremos planteando a los visitantes del stand el reto de obtener diferentes números pares cada uno como suma de dos números primos. Se acotará el número par máximo (100).

Para ello proporcionamos a los visitantes del stand la plantilla y las cajas con las tarjetas de los números pares y con las tarjetas de los números primos. De este modo se plantea el problema de una forma más cómoda y atractiva. Para facilitar el ejercicio, y cuando sea necesario, pondremos a su disposición el cartel que indica los números primos.

Una vez que ya hayan experimentado suficiente le explicaremos que están ante uno de los problemas más importante de las matemáticas sin resolver. Les explicaremos en qué consiste la conjetura de Goldbach y su conjetura débil enseñando el gráfico que demuestra esta conjetura hasta el número 50.

Finalmente contaremos un poco de su historia y como curiosidad mostraremos una imagen de la carta original donde se planteó por primera vez el problema.